2018 東邦大（医）　9番　解説

$x>0$ で定義された連続関数 $f(x)$ は $f'(x)>0$ を満たし，$f(2)=3$ である。
また，$x>0$ および $y>0$ に対し，$f(xy)-f(x)-f(y)=xy-x-y$ が成り立つ。
このとき，$f(4)=$ $\boxed{\text{シ}}$，$f(8)=$ $\boxed{\text{スセ}}$ である。さらに，
方程式 $f(x+2)+f(x-2)+(x-5)(x+3)=0$ の解は $x=$ $\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

（2018　東邦大）

解) $x>0$ において，$f'(x)>0$ …① かつ $f(2)=3$ …②

また，$x>0$，$y>0$ に対し，$f(xy)-f(x)-f(y)=xy-x-y$ …③

③に $x=y=2$ を代入すると，$f(4)-f(2)-f(2)=2\times2-2-2$

$\therefore\ f(4)=2f(2)=6$ //　（②より）

③に $x=2$，$y=4$ を代入すると，$f(8)-f(2)-f(4)=2\times4-2-4$

$\therefore\ f(8)=\underbrace{f(2)}_{3}+\underbrace{f(4)}_{6}+2=11$ //

さらに，$f(x+2)+f(x-2)+(x-5)(x+3)=0$ …④ について。

③を変形して　$f(x)+f(y)=f(xy)-xy+x+y$

よって　$f(x+2)+f(x-2)=f((x+2)(x-2))-(x+2)(x-2)+(x+2)+(x-2)$

$=f(x^2-4)-x^2+4+2x$

④に代入すると，$f(x^2-4)-x^2+4+2x+(x-5)(x+3)=0$

$\therefore\ f(x^2-4)=11$

$f(8)=11$ だったから，$x^2-4=8$　（①より，他にはない）

$x^2=12$

$x>0$ より，$x=2\sqrt{3}$ //